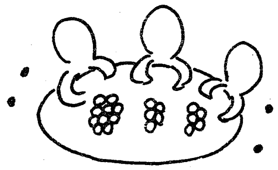
数理解析研究所講究録
471巻 1982年 160-167

n人でする石取りゲーム



明石高専　加納幹雄 (MIKIO KANO)

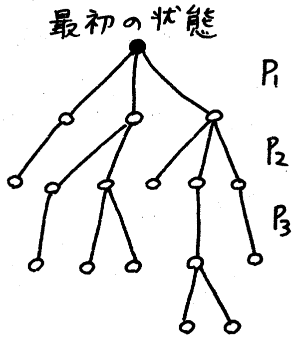
まずいくつかの石の山をつくる．この石の山を用いてn人のプレーヤー$P_1, P_2, \cdots, P_n$で次のような石取りゲームをする．まずP_1がどれか1つの山から1個以上石を取る．このとき取る石の数に制限をつける場合とつけない場合がある．次にP_2がある山から1個以上石を取る．以下このような石取りを$P_3, P_4, \cdots, P_n, P_1, \cdots, P_n, P_1, \cdots$と石が失くなるまで続けてゆく．そして$X_1$が着手(石を取ること)したとき全部の石が取られゲームは終ったものとする．X_1のi手前に着手したプレーヤーをX_{i+1}で表す．例えばP_1, P_2, P_3, P_4の4人でゲームをし，P_3が着手したときゲームが終了すれば，$X_1 = P_3$, $X_2 = P_2$, $X_3 = P_1$, $X_4 = P_4$である．このとき$\{1, 2, \cdots, n\}$上の置換σを1つ選び，これを用いてプレーヤーの順位を1位$X_{\sigma(1)}$，2位$X_{\sigma(2)}$，$\cdots$，n位$X_{\sigma(n)}$と定める．このような石取りゲームを<u>n人でするσ-石取りゲーム</u>とよぶ．しかしここで扱うのは次のような特別なゲームである．

<u>正規型石取りゲーム</u>　　1位X_1，2位X_2，$\cdots$，n位X_n

<u>ℓ後退正規型石取りゲーム</u>　　1位X_ℓ，2位$X_{\ell+1}$，$\cdots$，n位$X_{\ell+n-1}$

ただし$\ell \geq 2$で，添字$\ell+i$は$(\mathrm{mod}\ n)$でとるものとする．

すると2人でする正規型石取りゲームは普通の正規型石取りゲームになっており，2人でする2後退正規型石取りゲームは普通の逆型石取りゲームになっている．



ゲームの木

さて σ-石取りゲームを決めると，最初の石の山の型により，誰れが1位になるかがゲームを始める前に理論上確定することを述べよう．最初の石の山を頂点とするゲームの木を考える．この木の点は石の山の型に対応し，辺は着手に対応する([3])．するとこの木の末端から順に誰が1位になるかが，特に全員の順位が決まってくる．つまりある点（ある石の山）において，その点からでているすべての下の点に対し誰が1位になるかが決まっておれば，この点で着手するプレーヤーは自分の順位が最もよくなるように着手するはずである．よってこの点からゲームを始めると誰が1位になるか，特に全員の順位が確定する．これを繰り返してゆけばよい．

もちろんあるプレーヤーが1位になるはずのゲームであっても，最下位にならないはずのプレーヤーがミスをすれば他のプレーヤーが1位になることもある．そしてミスをしたプレーヤーは，他のプレーヤーがその後着手を誤まらなければ，最初に得られるはずだった順位より下位になる．つまり1人のミスは全体の順位を狂わせるが，ミスをした本人の順位も下げる．

$x, y, \cdots, z$ 個の石からなる石の山を $(x, y, \cdots, z)$ で表す．そして $x, y, \cdots, z$ を2進展開し，各桁ごとに加えたものを$(\mathrm{mod}\ n)$で求め，これを n 進展開したものとみなして求めた数を <u>n-ニム和</u> とよび $x \oplus y \oplus \cdots \oplus z$

で表す、つまり $x=\sum x_i 2^i$, $y=\sum y_i 2^i$, $\cdots$, $z=\sum z_i 2^i$ とし $x\oplus y \oplus\cdots\oplus z=\sum w_i n^i$ とおくと $x_i+y_i+\cdots+z_i\equiv w_i \pmod{n}$, $0\leq w_i<n$ である、例えば 14, 11, 10, 7 の 3ニム和 は $14\oplus 11\oplus 10\oplus 7=(8+4+2)\oplus(8+2+1)\oplus(8+2)\oplus(4+2+1)=(3\times 8+2\times 4+4\times 2+2\times 1)=(2\times 9+1\times 3+2\times 1)=23$ となる、

<u>定理A</u>　石の山 $(x, y, \cdots, z)$ を用いて n人で、取る石の数に制限のない正規型石取りゲームをするものとする、このとき最初に着手するプレーヤーが最下位になるための必要十分条件は

$$x\oplus y\oplus\cdots\oplus z=0 \qquad (n=\text{ム和})$$ となることである、

<u>定理B</u>　石の山 $(x, y, \cdots, z)$ を用いて n人で、取れる石の数に制限のない l後退正規型石取りゲームをするものとする、このとき最初に着手するプレーヤーが最下位になるための必要十分条件は

もしある石の山に2個以上石があれば　$x\oplus y\oplus\cdots\oplus z=0$　(n=ム和)

もしすべての石の山に1個石があれば　$x\oplus y\oplus\cdots\oplus z=l-1$　(n=ム和)

となることである、

取れる石の数が k個以下に制限された場合は、石の山が高々2つまでの場合しかわかっていない、また一般に n人でする石取りゲームのグルンデー関数についても存在、不存在（合理的な計算法を含めて）が不明である、2人でする石取りゲームについては一松〔1〕が詳しい、又2人でする逆型石取りゲームについては山崎〔2〕を参照されたい、

定理Aの証明

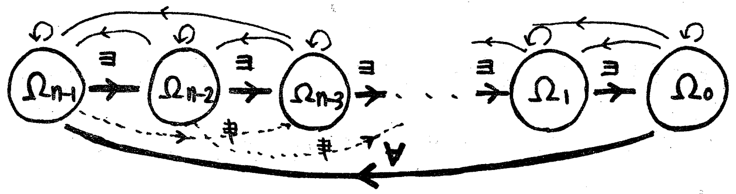
石のない状態(0)も含めて石の山の全体をΩとおく. そしてi番目に着手するプレーヤーP_iが1位になる石の山の全体をΩ_iで表し, 便宜上Ω_nをΩ_0とかき$(0)\in\Omega_0$とする. するとΩは$\Omega=\Omega_0\cup\Omega_1\cup\cdots\cup\Omega_{n-1}$と直和に分割される. 石の山$\overline{m}$に着手$\varphi$をして得られる石の山を$\varphi(\overline{m})$とかき, 着手$\varphi_1$をし次に着手$\varphi_2$をして得られる石の山を$\varphi_2(\varphi_1(\overline{m}))=\varphi_2\circ\varphi_1(\overline{m})$とかく.

補題1　Ωの分割$\Omega=\Omega_0\cup\Omega_1\cup\cdots\cup\Omega_n$は次の条件をみたす.

(1)　$(0)\in\Omega_0$、また$\overline{m}\in\Omega_0$なら任意の着手φに対し$\varphi(\overline{m})\in\Omega_{n-1}$となる.

(2)　$\overline{m}\in\Omega_i$　$(1\leq i\leq n-1)$なら$\varphi(\overline{m})\in\Omega_{i-1}$となる着手$\varphi$が存在する.

(3)　$\overline{m}\in\Omega_i$　$(2\leq i\leq n-1)$なら任意の着手φに対し$\varphi(\overline{m})\notin\Omega_{i-2}\cup\cdots\cup\Omega_0$.



着手の存在と石の山の流れ

$\overline{m}\in\Omega_i$	Ω_{n-1}	Ω_{n-2}	⋯	Ω_2	Ω_1	Ω_0
P_1から始めたときのP_1の順位	$n-1$	$n-2$		2	1	n
P_1　〃　P_n　〃	n	$n-1$		3	2	1

$\overline{m}$からゲームを始めたときのP_1とP_nの順位表

(証)　$\overline{m}\in\Omega_i, i\neq 0$とする. $\overline{m}$に着手するプレーヤーをPとするとPの順位はiとなるはずである(上の表). 1手着手するとその局面において最後に着手するプレーヤーとなるから, 最後に着手するプレーヤーがi位になる局面にできるはずである(上の表). よって(2)が成り立つ. また$\overline{m}\in\Omega_i$ $(i\geq 2)$のとき$\varphi(\overline{m})\in\Omega_{i-2}\cup\cdots\cup\Omega_0$となる着手$\varphi$が存在すれば, この着手によって$P$の順位は$i-1$位より良くなり$i$位になることに反する. よって(3)が成り立つ. 同じ理由で$m\in\Omega_0$ならすべての着手φで$\varphi(\overline{m})\in\Omega_{n-1}$となる. つまり(1)が成り立つ.

<u>補題2</u>　Ω の分割 $\Omega=\Omega_0'\cup\Omega_1'\cup\cdots\cup\Omega_{n-1}'$ が補題1と同じ条件をみたすなら $\Omega_i=\Omega_i'$，$0\leq i\leq n-1$，となる．

（証）Ω の元全体に，$\overline{m}$ の番号 $>\varphi(\overline{m})$ の番号（すべての着手 φ に対して）となるように番号をつけ，この番号に関する帰納法で証明する．$(0)\in\Omega_0$ より1番目はよい．$\overline{m}\in\Omega_i'$ とする．もし $\overline{m}\in\Omega_0'$ なら $\varphi(\overline{m})\in\Omega_{n-1}'$ となり，帰納法の仮定により $\varphi(\overline{m})\in\Omega_{n-1}$ となる．すべての着手で Ω_{n-1} になる $\overline{m}$ は Ω_0 のものに限るから $\overline{m}\in\Omega_0$．もし $\overline{m}\in\Omega_i'$ $(1\leq i\leq n-1)$ なら $\varphi(\overline{m})\in\Omega_{i-1}'$ となる着手 φ が存在する．帰納法の仮定より $\varphi(\overline{m})\in\Omega_{i-1}$．よって $\overline{m}$ を用いてゲームをすると P_1 は i 位以上になれる（Ω_{i-1} における P_n の順位は i 位）．一方 $\varphi(\overline{m})\in\Omega_j'$ $(j\leq i-2)$ となる着手 φ は存在しないし，$\varphi(\overline{m})\in\Omega_k'$ $(k\geq i)$ となる着手 φ を P_1 がすれば $\varphi(\overline{m})\in\Omega_k$ より P_1 の順位は $k+1$ 位となる．よって P_1 の得られる最高順位は i 位である．故に $\overline{m}\in\Omega_i$．

<u>補題3</u>　Ω の部分集合 X が次の条件をみたせば $X=\Omega_0$ である．

(1)　$(0)\in X$

(2)　$\overline{m}\in X$ とすると，任意の着手 $\varphi_1,\cdots,\varphi_r$ $(1\leq r\leq n-1)$ に対し $\varphi_r\circ\cdots\circ\varphi_1(X)\notin X$．

(3)　$\overline{m}\notin X$ なら $\varphi_s\circ\cdots\circ\varphi_1(X)\in X$ となる着手 $\varphi_1,\cdots,\varphi_s$ $(1\leq s\leq n-1)$ が存在する．

（証）$\Omega_0''=X$，$\Omega_{n-1}''\ \{\varphi(\overline{m})\mid\overline{m}\in\Omega_0''\}$，$\Omega_{n-2}''=\{\varphi(\overline{m})\mid\overline{m}\in\Omega_{n-1}''\}-\Omega_{n-1}''$，$\cdots$ $\Omega_1''=\{\varphi(\overline{m})\mid\overline{m}\in\Omega_2''\}-\Omega_{n-1}''\cup\cdots\cup\Omega_2''$（補題1の図）とおくと，$\Omega$ は $\Omega=\Omega_0''\cup\cdots\cup\Omega_{n-1}''$ と直和に分割され，又補題1の条件をみたす．よって補題2より $\Omega_i''=\Omega_i$，特に $\Omega_0''=X=\Omega_0$ となる．

$n=4$ 和が 0 となる石の山の全体を Y で表す．すなわち

$$Y=\{\overline{m}=(x,y,\cdots,z)\mid x\oplus y\oplus\cdots\oplus z=0\quad(n=4\text{和})\}\cup\{(0)\}$$

とおく．以下Yが補題3の条件をみたすこと示す．これができれば定理Aは証明されたことになる．Yが補題3の(1)をみたすのは明らかである．

<u>補題4</u> Yは補題3の条件(2)をみたす．

(証) $\overline{m}=(m_1, m_2, \cdots, m_k)\in Y$ が r 回の着手 $\varphi_r\circ\varphi_{r-1}\circ\cdots\circ\varphi_1$ で $\overline{m'}=(m_1', \cdots, m_k')$ になったとする．$m_i=\sum_t \alpha_i^t 2^t$，$m_i'=\sum_t \beta_i^t 2^t$ ($\alpha_i^t, \beta_i^t=0$ or 1) とおくとある i, t で $\alpha_i^t>\beta_i^t$ となっている．このような i, t の中で t が最大になるものを s とおく．すると $\sum_{i=1}^{k}\alpha_i^s\equiv 0 \pmod{n}$ と $\#\{i \mid \alpha_i^s\neq\beta_i^s\}\leq r<n$ より

$$-\sum_{i=1}^{k}\beta_i^s\equiv\sum_i(\alpha_i^s-\beta_i^s)\equiv n-\#\{i \mid \alpha_i^s\neq\beta_i^s\}\not\equiv 0 \pmod{n}.$$

よって $\sum_i\beta_i^s\not\equiv 0 \pmod{n}$．つまり $\overline{m'}\notin Y$.

<u>補題5</u> Yは補題3の条件(3)をみたす．

$\overline{m}=(m_1, \cdots, m_k)\notin Y$ とする．もし $k<n$ なら k 回の着手で $\overline{m}$ を $(0)\in Y$ にできる．よって $k\geq n$ としてよい．$m_i=\sum_t \alpha_i^t 2^t$ ($\alpha_i^t=0$ or 1) とおく．

$m_1\oplus\cdots\oplus m_k=an^p+a_1n^{p-1}+\cdots$，$a>0$ とかけるが，一般性を失うことなく $\alpha_1^p=\cdots=\alpha_a^p=1$ と仮定してよい．$m_{a+1}\oplus\cdots\oplus m_k=\sum f_t n^t$ とおく．

<u>1°</u> もしすべての t，$0\leq t\leq p-1$，で $f_t=0$ 又は $n-a\leq f_t<n$ なら a 回の着手で $\overline{m}$ を $(m_1', \cdots, m_a', m_{a+1}, \cdots, m_k)$ にかえ $m_1'\oplus\cdots\oplus m_a'\oplus m_{a+1}\oplus\cdots\oplus m_k=0$ とできる．

(証) 各 t，$0\leq t\leq p-1$ に対し $f_t=0$ なら $g_t=0$，$f_t\neq 0$ なら $g_t=n-f_t$ とおく．そして整数 $y_1, \cdots,$ を $y_1\oplus\cdots\oplus y_a=\sum_{t=0}^{p-1}g_t n^t$ となるようにとる．これは $0\leq g_t\leq a$ より容易にできる．このとき各 m_i，$1\leq i\leq a$，を $m_i'=\sum_{t>p}\alpha_i^t 2^t+y_i$ にかえる（$\alpha_i^p=1$ より $m_i>m_i'$）．すると $m_1'\oplus\cdots\oplus m_a'\oplus m_{a+1}\oplus\cdots\oplus m_k=0$ となる．

2° もしある t, $0 \leqq t \leqq p-1$, で $0 < f_t < n-a$ となるなら，このような t の中で最大のものを q とする．このとき $\alpha_{a+1}^{q} = \alpha_{a+2}^{q} = \cdots = \alpha_{a+b}^{q} = 1$, $b = f_t$ と仮定してよいが，すると $m_1, \cdots, m_a$ を $m'_1, \cdots, m'_a$ にして

$$m'_1 \oplus \cdots \oplus m'_a \oplus m_{a+1} \oplus \cdots \oplus m_k = (a+b)n^q + b_1 n^{q-1} + \cdots$$

とできる．

(証) 各 t, $q < t < p$, に対し $f_t = 0$ なら $g_t = 0$, $0 < f_t$ なら $g_t = n - f_t$ とおき，整数 $y_1, \cdots, y_a$ を $y_1 \oplus \cdots \oplus y_a = \sum_{t=q+1}^{p-1} g_t n^t + a n^q$, $y_i < 2^p$, となるように決める．そして各 m_i を $m'_i = \sum_{t > p} \alpha_i^t 2^t + y_i$ にかえればよい．

$$m_{a+b+1} \oplus \cdots \oplus m_k = \sum f'_t 2^t \qquad \text{とおく．}$$

3° もしすべての t, $0 \leqq t < q$ で $f'_t = 0$ 又は $n-(a+b) \leqq f'_t < n$ なら $m_1, \cdots, m_{a+b}$ を $m''_1, \cdots, m''_{a+b}$ にかえて $m''_1 \oplus \cdots \oplus m''_{a+b} \oplus m_{a+b+1} \oplus \cdots \oplus m_k = 0$ とできる．

(証) 各 t, $0 \leqq t < q$ に対し $f'_t = 0$ なら $g'_t = 0$, $0 < f'_t$ なら $g'_t = n - f'_t$ とおき，整数 $y'_1, \cdots, y'_{a+b}$ を $y'_1 \oplus \cdots \oplus y'_{a+b} = \sum_{t=0}^{q-1} g'_t n^t$, $y'_i < 2^q$ となるように決める．$g'_t \leqq a+b$ よりこれはできる．さて各 m_i を $1 \leqq i \leqq a$ なら $m'_i = \sum \alpha_i^t 2^t$ とおくとき $\sum_{t > q} \alpha_i^t 2^t + y'_i = m''_i$ に，$a < i \leqq a+b$ なら $\sum_{t > q} \alpha_i^t 2^t + y'_i$ にかえる．すると $m''_1 \oplus \cdots \oplus m''_{a+b} \oplus m_{a+b+1} \oplus \cdots \oplus m_k = 0$ となる．($1 \leqq i \leqq a$ なら $m_i \geqq m'_i \geqq m''_i$ より m_i から m''_i に 1回(又は0回)の着手でできる)

以下もし $0 < f'_t < n-(a+b)$ となる f'_t があれば 2° と同じようにし，次に 3° に相当することが成り立つかどうか調べる．成り立てばよいし，成り立たねば再び 2° と同じことをする．すると l 回 ($l \leqq n-1$) の着手で $m_1, \cdots,$

m_ℓ を $m_1^*, \cdots, m_\ell^*$ にかえ $m_1^* \oplus \cdots \oplus m_\ell^* \oplus m_{\ell+1} \oplus \cdots \oplus m_k = 0$ とできることがわかる。故に補題5は証明された。

以上で定理Aは証明されたことになる。定理Bの証明もほぼ同じようにしてできる。異なる点は $(0) \in X$, $(0) \in \Omega_0$ が $(1, \cdots, 1) \in X$, $\in \Omega_0$, ただし1はmod nで数えて $\ell-1$ 個, となるだけである。詳しくは[4]を参照されたい。

最後にいろいろ議論していただいた二宮博氏に感謝します。

文　献

〔1〕一松 信；石とりゲームの数理，森北出版 (1968)

〔2〕山崎洋平；On misére Nim type games, J. Math. Soc. Japan, Vol. 32, 461−475 (1980)

〔3〕二宮博；ある種のニムについて，明石高専研究紀要，Vol. 24 119−124 (1982)

〔4〕加納幹雄；The game of Nim played by n players，投稿中